PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel *réel* de dimension finie $n \geqslant 2$. Pour tout couple (A, B) d'endomorphismes de $\mathcal{E}$, on note AB le composé $A \circ B$. Pour tout entier $i \geqslant 0$, A^i est l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ défini par récurrence par $A^{i+1} = A^i A$ avec $A^0 = I$, automorphisme identique de $\mathcal{E}$; pour tout polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ d'une variable, à coefficients réels, $P(A)$ *désigne l'endomorphisme* $\sum_{i=0}^{d} a_i A^i$.

L'image et le noyau de A sont respectivement notés $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$. Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{F}$ contienne l'image $A(\mathcal{F})$ qu'en donne A, on dit que $\mathcal{F}$ est *stable* par A. Enfin, s'il existe un entier $q > 0$ tel que $A^q = 0$, on dit que A est *nilpotent* et le plus petit de ces entiers q s'appelle *indice de nilpotence* de A.

I

Dans toute cette partie, L est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{E}$ et on note p son indice de nilpotence.

1.a. Soit i un entier positif ou nul. Montrer que l'égalité $\operatorname{Ker} L^i = \operatorname{Ker} L^{i+1}$ équivaut à l'égalité $\operatorname{Im} L^i = \operatorname{Im} L^{i+1}$ et qu'elle entraîne l'égalité $\operatorname{Im} L^j = \operatorname{Im} L^i$ pour tout entier $j \geqslant i$.

b. Montrer que si $\operatorname{Ker} L^i$ est différent de $\mathcal{E}$, il est aussi différent de $\operatorname{Ker} L^{i+1}$.

c. Montrer que la dimension du noyau de L^i croît strictement avec l'exposant i sur l'ensemble des entiers i de l'intervalle $[\,0,p\,]$. En déduire que $L^p = 0$ et que, si $p = n$, la dimension du noyau de L^i est égale à i pour tout entier i de l'intervalle $[\,0,n\,]$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier h de l'intervalle $[\,1, n-1\,]$ tel que L^h soit de rang $n-h$.

a. Établir que pour tout entier j de $[\,1, h\,]$, le rang de L^j est $n-j$.

b. Pour tout entier $i \geqslant 0$, établir une relation entre les dimensions des sous-espaces $\operatorname{Im} L^i$, $\operatorname{Im} L^{i+1}$ et $\operatorname{Im} L^i \cap \operatorname{Ker} L$.

c. Quel est l'indice de nilpotence de L ?

3. Dans cette question, on suppose le rang de L égal à $n-1$.

a. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ stable par L et de dimension $r \geqslant 1$; on note M la restriction de L à $\mathcal{F}$. Montrer que, pour tout entier j de $[\,1, r\,]$, les noyaux de L^j et de M^j sont égaux. Quel est le noyau de L^r ?

b. Caractériser les sous-espaces de $\mathcal{E}$ stables par L à l'aide des noyaux des endomorphismes L^i.

4. Dans cette question, on suppose que l'indice de nilpotence p de L est *strictement* compris entre 1 et n et on note e un élément de $\mathcal{E}$ tel que $L^{p-1}(e) \neq 0$.

a. Établir que la famille $(e, L(e), \ldots, L^{p-1}(e))$ est libre ; on notera $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ qu'elle engendre.

b. Soient e' un élément du dual $\mathcal{E}^*$ de $\mathcal{E}$, non orthogonal à $L^{p-1}(e)$, et ${}^tL$ l'endomorphisme de $\mathcal{E}^*$ transposé de L. Vérifier pour tout entier $i \geqslant 0$ l'égalité des endomorphismes ${}^t(L^i)$ et $({}^tL)^i$, qu'on notera désormais ${}^tL^i$. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{X}^*$ de $\mathcal{E}^*$ engendré par les ${}^tL^i(e')$ lorsque i parcourt l'ensemble des entiers positifs ou nul ? Quelle est la dimension du sous-espace $\mathcal{X}$ de $\mathcal{E}$ constitué des éléments de $\mathcal{E}$ orthogonaux à tous les éléments de $\mathcal{X}^*$?

c. Montrer que $\mathcal{X}$ est stable par L et que $\mathcal{E}$ est la somme directe de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{X}$.

d. Montrer que $\mathcal{E}$ est la somme directe de s sous-espaces vectoriels $\mathcal{E}_\ell$ $(\ell = 1,\ldots,s)$ dont chacun est stable par L et a pour dimension l'indice de nilpotence de la restriction de L à ce même sous-espace.

II

Dans toute la suite du problème, pour tout couple (A, B) d'endomorphismes de $\mathcal{E}$, on note $[\,A, B\,]$ l'endomorphisme $AB - BA$.

Dans cette partie II, A et B sont des endomorphismes *non nuls* de $\mathcal{E}$ et α un réel *non nul* tels que

$$[\,A, B\,] = \alpha B.$$

1.a. Pour tout triplet (U, V, W) d'endomorphismes de $\mathcal{E}$, vérifier l'égalité

$$[\,U, VW\,] = [\,U, V\,]\,W + V\,[\,U, W\,].$$

b. Soient P un polynôme d'une variable à coefficients réels et P' son polynôme dérivé. Établir l'égalité

$$[\,A, P(B)\,] = \alpha B P'(B)$$

et en déduire que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $\operatorname{Ker} B^k$ est stable par A.

c. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(B) = 0$ et montrer que B est nilpotent (on pourra utiliser l'endomorphisme $dP_n(B) - BP'_n(B)$ où P_n est un polynôme non nul de degré minimal d tel $P_n(B) = 0$).

2. Dans cette question, on suppose que le rang de B est $n-1$.

a. Quel est le rang de B^{n-1} ? Comment peut-on choisir x dans $\mathcal{E}$ de façon qu'en posant $x_k = B^{n-k}(x)$ pour tout entier k de $[\,1, n\,]$, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ soit, pour tout k, une base de $\operatorname{Ker} B^k$?

b. Montrer que x_1 est un vecteur propre de A, dont on notera λ la valeur propre associée. Quelle est la forme de la matrice de A relative à la base $(x_1, \ldots, x_n)$? Quels sont les éléments successifs de la diagonale principale de cette matrice ? En déduire en particulier que $\lambda - (n-1)\alpha$ est une valeur propre de A.

c. Montrer que si x est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre μ, B(x) est un vecteur nul ou un vecteur propre de A, dont on précisera la valeur propre associée.

d. Soit e_n un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda - (n-1)\alpha$; pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$ on pose $e_k = B^{n-k}(e_n)$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{E}$ dans laquelle A se diagonalise et rappeler les expressions des matrices de A et de B relatives à cette base.

III

Dans cette partie, A, B, C sont trois endomorphismes *non nuls* de $\mathcal{E}$ et α et β deux réels *non nuls* tel que

$$[A, B] = \alpha B, \quad [A, C] = \beta C, \quad [B, C] = A.$$

1. Calculer la valeur de $(\alpha+\beta)$ [B, C] et en déduire que α et β sont nécessairement opposés.

2. Dans cette question, on suppose que le rang de B est $n - 1$.

a. Trouver numériquement la somme des valeurs propres de A et en déduire ces valeurs propres. Quel est, en fonction de n, le rang de A ?

b. Calculer explicitement la matrice de C relative à la base de $\mathcal{E}$ définie dans la question *II.2.d* et vérifier que les endomorphismes A, B, C ainsi déterminés par leurs matrices satisfont aux conditions imposées au début de cette partie III. Quel est le rang de C ?

c. Montrer que $\{ 0 \}$ et $\mathcal{E}$ sont les seuls sous-espaces de $\mathcal{E}$ stables à la fois par A, B et C.

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$ et que $\{ 0 \}$ et $\mathcal{E}$ sont les seuls sous-espaces de $\mathcal{E}$ stables à la fois par A, B et C ; *aucune hypothèse* n'est faite sur le rang de B.

a. Pour tout entier $i \geqslant 1$, établir l'égalité

$$[B, C^i] = i C^{i-1} (A - (i-1) I)$$

et en déduire l'existence d'une valeur propre de A.

b. Montrer que A est diagonalisable et que B est de rang $n - 1$.